

## Rappel: propriétés des fonctions réelles.

-108-

(15) Composition des fonctions. Soit  $f: E \rightarrow F$  et  $g: G \rightarrow H$ ,  $E, F, G, H \subset \mathbb{R}$

Supposons  $f(E) \subset G \Rightarrow$  On définit la fonction composée  
$$g \circ f(x) = g(f(x)) : E \rightarrow H$$

Supposons  $g(G) \subset F \Rightarrow$  On définit la fonction composée  
$$f \circ g(x) = f(g(x)) : G \rightarrow F.$$

Ex.  $f(x) = \sin x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  ; et  $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$

$$f \circ g(x) = f(\sqrt{x^2 + 1}) = \sin(\sqrt{x^2 + 1}) : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$g \circ f(x) = g(\sin x) = \sqrt{\sin^2 x + 1} : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[ \quad (\text{pas surjective})$$

Remarque Si  $f: E \rightarrow F$  bijective  $\Rightarrow \exists f^{-1}$  réciproque,  $f^{-1}: F \rightarrow E$   
$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \quad \forall x \in E, \forall y \in F$$

$$\text{Alors } f \circ f^{-1}(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \Rightarrow f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall x \in E$$

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \Rightarrow f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in F.$$

## §4.2. Limite d'une fonction

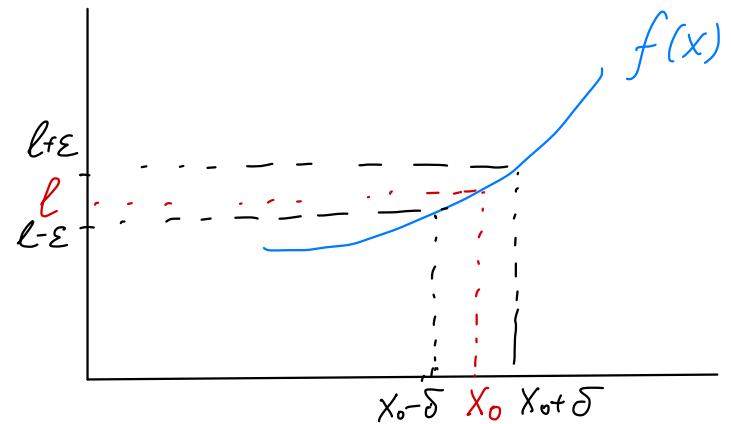
Déf Une fonction  $f: E \rightarrow F$  est définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} \subset E$

Remarque  $f$  n'est pas forcément définie en  $x_0$ .

Ex.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  est définie au voisinage de  $x_0 = 0$ , mais pas en  $x_0 = 0$ .

Déf. Une fonction  $f: E \rightarrow F$  définie au voisinage de  $x_0$  admet pour limite le nombre réel  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  si pour tout  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tel que pour tout  $x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \delta$ , on a  $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ .

Notation:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$



Ex.  $f(x) = 3x - 1$ ,  $x_0 = 1$ .

On va démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il faut trouver  $\delta > 0$  : si  $0 < |x - 1| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - 2| \leq \varepsilon$

$$|f(x) - 2| = |3x - 1 - 2| = |3x - 3| = 3|x - 1| \leq \varepsilon \Rightarrow \text{Si } \delta = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$$

on peut contrôler par  $\delta$  on veut!

$$\text{Si } \delta = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \text{Si } |x-1| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x-1| \leq 3\delta = 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$  Pour  $\forall \varepsilon > 0$  on a trouvé  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$  tel que la définition de la limite  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  est satisfaite  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (3x-1) = 2$ .

Proposition Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites

Soit  $f: E \rightarrow F$   $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$   $\iff$  Pour toute suite  $(a_n) \subset \{x \in E, x \neq x_0\}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ .

$P$   $Q$

Dém:  $P \Rightarrow Q$ . Soit  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ .

Soit  $(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0, a_n \in E \setminus \{x_0\} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - x_0| < \delta$  (puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ ).

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f(a_n) - l| < \varepsilon \stackrel{(\text{d} \text{f})}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ .

$Q \Rightarrow P$  par contraposée.

$\neg P \Rightarrow \neg Q$

$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \exists x: 0 < |x - x_0| < \delta \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon$   
(c'est la négation de  $P$ )

Alors on va construire une suite  $(a_n): \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq l$   
(la négation de  $Q$ )

$\exists \varepsilon > 0$ , fixé Soit  $\delta = 1 \Rightarrow \exists a_1 \in E : 0 < |a_1 - x_0| \leq 1$  et  $|f(a_1) - l| > \varepsilon$  -111-

$$\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists a_2 \in E : 0 < |a_2 - x_0| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |f(a_2) - l| > \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{4} \Rightarrow \exists a_3 \in E : 0 < |a_3 - x_0| \leq \frac{1}{4} \text{ et } |f(a_3) - l| > \varepsilon.$$

$$\vdots$$
$$\delta = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \text{on obtient } (a_n) : 0 < |a_n - x_0| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$$

mais  $|f(a_n) - l| > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq l \Rightarrow \text{contradiction avec la condition Q.}$

Q  $\Rightarrow$  P



Remarque. "Toute suite" dans la caractérisation est important:

Ex:  $f(x) = \begin{cases} 1 & , x = \frac{1}{n} , n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ n'existe pas}$

$$\text{mais } (a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Corollaire. Soit  $f: E \rightarrow F$  définie au voisinage de  $x_0$ .

Supposons que pour toute suite  $(a_n) \in E \setminus \{x_0\}$ , telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , la suite  $(f(a_n))$  converge. Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe.

Idée: Deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$ , et  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$   
Supposons.

Soit  $c_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ pair} \\ b_n, & n \text{ impair} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x_0 ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$   
 $\Rightarrow \nexists \lim f(c_n)$  - contradiction  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \Rightarrow$  caractérisation  $\lim f(x) = l.$   

Ex.  $f(x) = x^p, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$

Soit  $(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$  une suite arbitraire convergente vers  $x_0, x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Soit  $a_n = x_n - x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0) = 0.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_0 + a_n)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_0^p + \underbrace{\binom{p}{1} x_0^{p-1} a_n + \binom{p}{2} x_0^{p-2} a_n^2 + \dots + \binom{p}{p} a_n^p}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} \right) = x_0^p.$$

$\Rightarrow$  par la caractérisation

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p.}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Proposition. Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$ , alors  $l_1 = l_2$   
 (unicité de la limite)

Dém.: pour les suites  $(a_n)$  convergentes vers  $x_0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l_1$ ,  
 et  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l_2 \Rightarrow$  par l'unicité de la limite d'une suite  
 on a  $l_1 = l_2$  

Proposition Critère de Cauchy pour les fonctions

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \delta\}$ , on a  
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$ .

Voir [DZ § 4.2.8]

Proposition Opérations algébriques sur les limites

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: E \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ .

Alors: (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l_1 + \beta l_2$

(2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$

(3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{l_1}{l_2}$  si  $l_2 \neq 0$ ,  $g(x) \neq 0$  au voisinage de  $x_0$ .

Dém.: par la caractérisation à partir des suites.

-114-

$\Rightarrow$  Pour tout polynôme et toute fonction rationnelle,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$   
pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$  sauf les zéros du dénominateur de  $f(x)$ .

(Puisque on a démontré  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p \quad \forall p \in \mathbb{N}^+, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R};$   
opérations algébriques  $\Rightarrow$  on obtient les limites des fonctions rationnelles.

Ex  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-4}{x^2+2x+5} = \frac{2}{13}.$

Théorème des 2 gendarmes pour les fonctions.

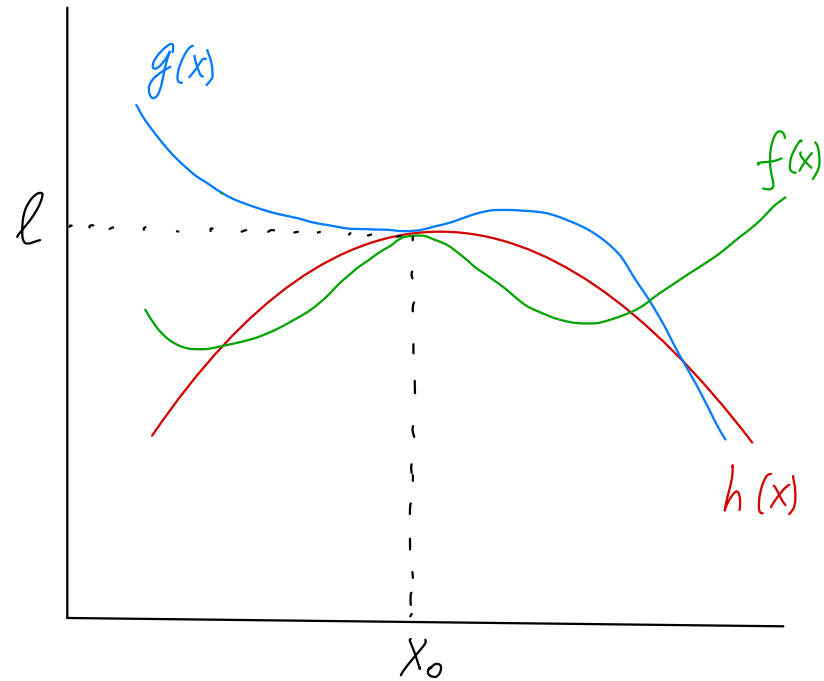
Soient  $f, g, h: E \rightarrow F$  tels que

(1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

(2)  $\exists \alpha > 0 : \forall x \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \alpha\}$

on a  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

$\Rightarrow$  Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$



Dém: Soit  $(a_n) \in \{x \in E \setminus \{x_0\}\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m, |a_n - x_0| \leq \alpha$   $\leftarrow$  le même  $\alpha$  que dans les conditions

Alors on a:  $f(a_n) \leq h(a_n) \leq g(a_n) \quad \forall n \geq m$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ , on a aussi  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \ell$   
par la caractérisation à partir des suites.

$\Rightarrow$  Par les 2 gendarmes pour les suites,

on a:  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n) = \ell$  pour toute suite  $(a_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ .

$\Rightarrow$  Par la caractérisation à partir des suites,  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$

